

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: ЧУМАЧЕНКО ТАТЬЯНА АЛЕКСАНДРОВНА
Должность: РЕКТОР
Дата подписания: 24.04.2023 15:47:35
Уникальный программный ключ:
9c9f7aaffa4840d284abe156657b8f85432bdb16



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Рабочая программа дисциплины составлена на основе единых подходов к структуре и содержанию программ высшего педагогического образования («Ядро высшего педагогического образования»)

Шифр	Наименование дисциплины (модуля)
Б1.О.07.04	Алгебра

Код направления подготовки	44.03.05
Направление подготовки	Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Наименование (я) ОПОП (направленность / профиль)	Математика. Информатика
Уровень образования	бакалавриат
Форма обучения	очная

Разработчики:

должность	учёная степень, звание	подпись	ФИО
доцент	к.ф.м.н.		Шумакова Е.О.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры (структурного подразделения)

Кафедра	Заведующий кафедрой	Номер протокола	Дата протокола	Подпись
математики и МОМ	Звягин К.А.	№ 7	10.03.2022	

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
2	ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) И ВИДОВ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)	5
3	УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	8
4	ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)	9
5	ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ.....	18

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Дисциплина «Алгебра» относится к (обязательной части) или (части, формируемой участниками образовательных отношений) Блока 1 «Дисциплины/модули» основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки/специальности 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень образования бакалавриат), направленность/профиль Математика. Информатика. Дисциплина является обязательной к изучению.

1.2 Общая трудоемкость дисциплины составляет 14 зачетных единиц 504 часа.

1.3 Изучение дисциплины «Алгебра» основано на знаниях, умениях и навыках, полученных при изучении обучающимися школьных предметов естественного цикла (алгебра, геометрия).

1.4 Дисциплина «Алгебра» формирует знания, умения и компетенции, необходимые для освоения следующих дисциплин: теория чисел, математическая логика, дискретная математика, числовые системы, методики обучения математике, для проведения следующих практик: ознакомительная по математике, педагогическая, научно-исследовательская работа.

1.5 Цель изучения дисциплины: формирование универсальных и профессиональных компетенций у обучающихся, готовности к использованию полученных результатов обучения при решении задач профессиональной деятельности учителя математики. Воспитание общей алгебраической культуры, необходимой будущему учителю для глубокого понимания основного школьного курса математики и школьных факультативных курсов.

1.6 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Таблица 1

Код и наименование компетенции по ФГОС	Код и наименование индикатора достижения компетенции
УК-1.2 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).
	ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.
ПК-3 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.	ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).

Таблица 2

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Образовательные результаты по дисциплине		
	знать	уметь	владеть
УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	основные закономерности математического мышления, методы критического анализа и синтеза информации	обобщать, анализировать математические факты, методы, алгоритмы; формулировать задачу и осуществлять выбор соответствующего метода решения	навыками рефлексии мыслительной деятельности, основными законами логического мышления
ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	выбрать нужную алгебраическую структуру в качестве модели задачи, применить соответствующий алгоритм для ее решения, реализовать	методами доказательства теорем (например, метод доказательства от противного, конструктивный метод,

		соответствующие методы при доказательстве теорем	метод математической индукции)
ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	роль и место алгебры в системе других математических дисциплин; основные положения алгебры, ее идеи и методы	осуществляет отбор содержания, методов и технологий обучения математике в различных формах организации образовательного процесса в соответствии с современными требованиями к образованию.	навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике
ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов.

2 ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) И ВИДОВ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Таблица 3

№ п/ п	Наименование раздела дисциплины (темы)	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						
		Л	ЛЗ		ПЗ		СРС	Итого часов
				В т.ч. в форме практи ческой подгот овки		В т.ч. в форме практи ческой подгот овки		
Первый семестр								
Итого в семестре		34			38		72	144
Раздел 1. Элементы теории множеств								
1	Логика высказываний	2			2		4	8
2	Логика предикатов	2			2		4	8
3	Множества. Операции над множествами	2			2		4	8
4	Элементы комбинаторики	2			2		6	10
5	Бинарные отношения	2			2		4	8
6	Отношения эквивалентности и порядка	2			2		4	8
7	Отображения	2			2		4	8
8	Основные алгебраические структуры	2			2		4	8
9	Поле комплексных чисел	4			4		6	14
Раздел 2. Системы линейных уравнений, матрицы и определители								
10	Системы линейных уравнений	2			4		6	12
11	Матрицы	2			2		4	8
12	Перестановки. Определение определителя	2			2		4	8
13	Свойства определителя	2			4		6	12
14	Формула обратной матрицы	2			2		6	10
15	Квадратные СЛУ	2			2		4	8
16	Базисный минор, ранг матрицы	2			2		2	6
Форма промежуточной аттестации								
Дифференцированный зачет								
1 семестр								144
Второй семестр								
Итого в семестре		24			30		54	144
Раздел 3. Линейные векторные пространства, отображения и операторы								
1	Линейное векторное пространство. Линейная зависимость	2			2		4	8
2	Подпространство, свойства. Базис пространства.	2			2		4	8
3	База и ранг системы векторов.	2			2		4	8
4	Исследование системы линейных уравнений	2			2		4	8
5	Координаты вектора в разных базисах	2			2		4	8
6	Сумма подпространств	2			2		4	8
7	Гомоморфизм векторных пространств	2			2		4	8
8	Свойства матрицы гомоморфизма	2			2		4	8
9	Собственные векторы эндоморфизма	2			4		6	12
10	Собственные векторы матрицы	2			4		6	12
11	Евклидово пространство	2			4		6	12

12	Симметрические преобразования	2			2		4	8
Форма промежуточной аттестации								
Экзамен								36
2 семестр								144
Третий семестр								
Итого в семестре		22			26		30	108
Раздел 4. Алгебраические структуры								
1	Группы, примеры	2			2		6	10
2	Сопряжение. Подгруппы	2			2		4	8
3	Циклические группы	2			2		6	10
4	Понятие изоморфизма, гомоморфизма групп	2			2		4	8
5	Кольцо. Идеалы кольца	2			2		6	10
6	Отношение делимости и его свойства	2			2		4	8
7	Простые и составные элементы кольца	2			2		6	10
8	Евклидово кольцо	2			2		6	10
9	НОД и НОК в кольце главных идеалов	2			4		6	12
10	Кольцо полиномов $K[x]$	2			2		6	10
11	Наибольший общий делитель полиномов над полем	2			4		6	12
Форма промежуточной аттестации								
Дифференцированный зачет								
3 семестр								108
Четвертый семестр								
Итого в семестре		24			30		54	108
Раздел 5. Многочлены от одной и нескольких переменных								
1	Кольцо полиномов $K[x]$. Деление полиномов с остатком	2			2		4	8
2	Кратные множители полинома	2			2		2	6
3	Критерий существования общего делителя положительной степени				2		4	6
4	Основная теорема алгебры	2					4	6
5	Кольцо полиномов от нескольких переменных	2			2		4	8
6	Симметрические полиномы. Теорема Виета	2			2		4	8
7	Целые и рациональные корни полинома над Z	2			2		4	8
8	Полиномы над полем действительных чисел	2			2		2	6
9	Решение кубических уравнений	2			4		4	10
10	Решение уравнений четвертой степени	2			4		4	10
11	Границы вещественных корней				2		4	6
12	Простое и конечное расширение поля	2			2		2	6
13	Алгебраическое расширение поля	2			2		4	8
14	Разрешимость уравнений в радикалах	2			2		4	8
15	Построение с помощью циркуля и линейки						4	4
Форма промежуточной аттестации								
Дифференцированный зачет								
4 семестр								108
Курсовая работа/ Курсовой проект								
Итого по дисциплине								504

3 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1 Учебно-методическая литература*

№ п/п	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)
1. Основная литература	
1	Куликов Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И., Москаленко, А.А. Фомин. М.: Просвещение, 1993. 288 с.
2	Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург. Лань, 2010. 475с.
3	Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для пед. ин-тов по спец. «Математика», «Математика и физика», «Физика и математика» / Л.Я. Куликов. М.: Высшая школа, 1979. 559 с
2. Дополнительная литература	
4	Кострикин А.И. Введение в алгебру. учебник для вузов: в 3 частях, физматлит, 2001, 367с.
5	Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учеб. пособие для студентов физ. мат. спец. вузов / Л.Б. Шнеперман. Минск.: Дизайн ПРО., 2000. 240 с.
6	Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. Факториал, 1995. 351с.
7	Березина Н.А. Линейная алгебра: учебное пособие/ Саратов: Научная книга, 2012. 126 с.

3.2 Электронная учебно-методическая литература

№ п/п	Наименование	Ссылка на информационный ресурс
1.	цифровой образовательный ресурс IPR SMART	http://www.iprbookshop.ru
2.	База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU	https://elibrary.ru/defaultx.asp

4 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

4.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

4.1.1. Текущий контроль

№ п/п	Наименование оценочного средства	Код компетенции, индикатора
Раздел 1. Элементы теории множеств		
1	<p>Типовая контрольная работа</p> <ol style="list-style-type: none"> Выполните операции над множествами $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, \bar{A}, $B \setminus \bar{A}$, если $A = (2, 4)$, $B = [4, 5]$. Изобразите на графике декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ Выясните, является ли бинарное отношение ρ, заданное на множестве целых чисел следующим образом: <ol style="list-style-type: none"> $m \rho n \Leftrightarrow (9m - n)$ делится нацело на 4, рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, отношением эквивалентности, отношением порядка Доказать, что $2^n > n^3$ при натуральном $n \geq 10$. 5 девушек и 7 юношей играют в городки. Сколько способов разбиться на 2 команды по 6 человек, при условии, что в команде не менее 1 девушки? 	УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.
2	<p>Индивидуальное домашнее задание</p> <ol style="list-style-type: none"> Проверить свойства отношения на Z Проверить свойства бинарной операции (ассоциативность, наличие нейтрального элемента, наличие симметрического) на множестве N Выполнить действия с комплексными числами $z_2^2 - \frac{1}{z_1} \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ 	УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.
Раздел 2. Системы линейных уравнений, матрицы и определители		
1	<p>Типовая контрольная работа</p> <ol style="list-style-type: none"> Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$. Пусть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = BC$. Найдите определитель каждой матрицы. Найдите матрицу, обратную к матрице: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$. Решите уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 	УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.

2	<p>Индивидуальное домашнее задание</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Выполнить действия с матрицами 2. Решить матричное уравнение 3. Решить систему уравнений (методом Жордана-Гаусса, по формулам Крамера) 4. Найти обратную матрицу 5. Вычислить определитель 2,3,4 порядков 	<p>УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.</p>
Раздел 3. Линейные векторные пространства, отображения и операторы		
1	<p>Типовая контрольная работа</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Вычислите ранг системы векторов: $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 2)$. 2. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (1, 0, 0, 0)$. 3. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений. $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$ $3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$ $4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$ 4. Выясните, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу в базисе $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$. 5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства над \mathbf{R} матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$ 	<p>УК-1.2. ПК-1.1.</p>
2	<p>Индивидуальное домашнее задание</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти базу системы векторов и выразить векторы через базу 2. Найти базис пространства 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 	<p>УК-1.2. ПК-1.1.</p>
Раздел 4. Алгебраические структуры		
1	<p>Типовая контрольная работа</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти все подгруппы циклической группы 2. Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трёх отрицательных элементов для класса, порождённого элементом 4. 3. Проверить, является ли $I = \{a+bi \mid a, b \text{ из } 5Z\}$ идеалом в $Z[i]$ 4. Проверить, приводимы ли числа $3i$; $i-5$ в $Z[i]$ 5. Найти НОД чисел 4675 и 2805 и его линейное выражение 	<p>УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2.</p>
2	<p>Индивидуальное домашнее задание</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти все подгруппы циклической группы 2. Найдите все гомоморфизмы циклической группы порядка n в себя и указать ядра и образы гомоморфизмов 3. Построить таблицу Кели кольца Z_n классов вычетов целых чисел по модулю n 4. Найти обратимые элементы кольца 5. Выполнить действия с подстановками и найти их порядок 6. Найти классы сопряженных элементов и подгруппы для группы D_{2n} 	<p>УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2.</p>
Раздел 5. Многочлены от одной и нескольких переменных		
1	<p>Типовая контрольная работа</p>	<p>УК-1.2.</p>

	<p>1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ на многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.</p> <p>2. Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.</p> <p>3. Используя схему Горнера найдите $f(a)$, где $f = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$.</p> <p>4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ по степеням $(x - 4)$.</p> <p>5. С помощью производной отделить неприводимые кратные множители многочлена: $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.</p> <p>6. Найдите все рациональные корни многочлена и разложить его на множители, неприводимые над полем рациональных чисел $f(x) = 20x^5 - 72x^4 + 57x^3 - 75x^2 + 37x - 3$.</p> <p>7. Найдите все комплексные корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.</p> <p>8. Найдите все комплексные корни уравнения: $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.</p> <p>9. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} + 1}$.</p> <p>10. Выразите многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2$ через основные (элементарные) симметрические многочлены.</p> <p>11. Найдите сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$.</p>	<p>ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.</p>
2	<p>Индивидуальное домашнее задание</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти НОД и НОК многочленов 2. Найти кратность корня $x=3$ для многочлена 3. Найти значение симметрического многочлена $F(x_1, x_2, x_3)$ от корней многочлена $f(x)$ 4. Решить уравнение третьей степени по формулам Кардана 5. Решить уравнение четвертой степени методом Феррари 6. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби 	<p>УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2. ПК-3.1.</p>

4.1.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с локальным нормативным актом в ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ».

Промежуточная аттестация предусмотрена в виде дифференцированного зачета и экзамена.

Вопросы к дифференцированному зачету / экзамену:

Элементы теории множеств

1. Операции над множествами, их свойства.
2. Метод математической индукции.
3. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями.
4. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности.
5. Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства.
6. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.

7. Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства.
8. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Свойства операции комплексного сопряжения.
9. Геометрическое представление комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
10. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
11. Извлечение корней из комплексных чисел.

Системы линейных уравнений, матрицы и определители

1. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений.
2. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
3. Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры). Кольцо матриц.
4. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
5. Основные свойства определителей.
6. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
7. Обратная матрица, способы её вычисления.
8. Запись и решение системы n линейных уравнений с n переменными в матричной форме. Правило Крамера.

Линейные векторные пространства, отображения и операторы

1. Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства.
2. Линейная зависимость системы векторов.
3. Базис и ранг конечной системы векторов. Разложение вектора по базису. Базис и размерность конечномерного векторного пространства.
4. Ранг матрицы. Способы его вычисления.
5. Критерий совместности системы линейных уравнений.
6. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы.
7. Подпространства, критерий подпространства, примеры.
8. Подпространство фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

9. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.
10. Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства. Ядро и образ линейного отображения.
11. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису.
12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение.

Алгебраические структуры

1. Определение, примеры и простейшие свойства групп. Группы подстановок и классов вычетов.
2. Подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа.
3. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп.
4. Понятие циклической группы, примеры,
5. Подгруппы циклических групп.
6. Классы сопряженных элементов в группе, примеры
7. Определение, примеры и простейшие свойства колец.
8. Подкольца и идеалы кольца.
9. Отношение делимости и его свойства. Теорема о делении с остатком.
10. Простые и составные элементы кольца.
11. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов \mathbb{Z}_m
12. Евклидовы кольца. Кольцо целых гауссовых чисел
13. НОД и НОК в кольце главных идеалов
14. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства.
15. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства.
16. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители.

Многочлены от одной и нескольких переменных

1. Теорема Безу. Схема Горнера.
2. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов.
3. Формальная производная многочлена и кратные корни.
4. Основная теорема алгебры.

5. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители.
6. Теорема Виета.
7. Решение уравнений 3-й и 4-й степени.
8. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
9. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.
10. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.
11. Алгебраические расширения полей.
12. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.
13. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах.
14. Алгебраические и трансцендентные числа.
15. Построение кольца многочленов от нескольких переменных.
16. Симметрические многочлены.
17. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.

Задания к дифференцированному зачету / экзамену:

Элементы теории множеств

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, \bar{A} , $B \setminus \bar{A}$, если $A = (2, 4)$, $B = [4, 5]$. Изобразите на графике декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$.
2. Выясните, справедливо ли равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
3. Методом математической индукции докажите, что:
а) $S_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n(3n - 1)$; б) $8^n - 1$ нацело делится на 7.
4. Выясните, является ли бинарное отношение ρ , заданное на множестве целых чисел следующим образом:

$$m \rho n \Leftrightarrow (9m - n) \text{ делится нацело на } 4,$$

рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, отношением эквивалентности, отношением порядка.

5. Бинарное отношение задано на множестве пар действительных чисел. Выясните, является ли оно отношением эквивалентности или отношением порядка.

а) $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d$.

б) $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow a < c \wedge b \leq d$.

6. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и множество $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Отображение $S: A \rightarrow B$ задано следующим образом: $S = \{(0, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Является ли оно сюръективным, инъективным, биективным?

7. Охарактеризуйте соответствия (отображения), действующие на множестве действительных чисел: а) $xfy \Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$; б) $xgy \Leftrightarrow y = \cos x$.

8. Найдите композиции $g \circ f, f \circ g$: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \cos x$.

9. Докажите, что для данных функций существуют обратные функции и найдите их.

а) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4x - 2$; б) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = e^x$.

10. Вычислите i^{345} .

11. Найдите все комплексные корни уравнения $x^2 + x + 2 = 0$.

12. Вычислите корни $\sqrt[5]{\frac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$ и результат записать в тригонометрической форме.

13. Геометрически описать множество комплексных чисел z , для которых $|z - 1| = 6$.

Системы линейных уравнений, матрицы и определители

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Пусть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A = BC$. Найдите определитель каждой матрицы.

3. Найдите матрицу, обратную к матрице: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

5. Решите уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 &= -4. \end{aligned}$$

Линейные векторные пространства, отображения и операторы

1. Вычислите ранг системы векторов: $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, -1), \mathbf{a}_2 = (1, 2, -1, 3), \mathbf{a}_3 = (3, 1, 2, 1), \mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 2)$.

2. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{b}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

3. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений.

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$$

4. Выясните, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу в базисе $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в

некотором базисе линейного пространства над \mathbf{R} матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Алгебраические структуры

1. Выясните, является ли множество целых чисел кратных 7, группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?
2. Выясните, является ли множество чисел вида $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?
3. Найдите НОД и НОК чисел $a = 318$ и $b = 477$. Найти целые x, y , такие, что:

$$\text{НОД}(a, b) = ax + by.$$

4. С каким наименьшим неотрицательным числом сравнимо число a по модулю 7.
а) $a = 342$; б) $a = -23$?
5. Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трёх отрицательных элементов для класса, порождённого элементом 4.

Теория многочленов

1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ на многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
2. Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
3. Используя схему Горнера найдите $f(a)$, где $f = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$.
4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ по степеням $(x - 4)$.
5. С помощью производной отделить неприводимые кратные множители многочлена:
6. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.
7. Найдите все рациональные корни многочлена и разложить его на множители, неприводимые над полем рациональных чисел $f(x) = 20x^5 - 72x^4 + 57x^3 - 75x^2 + 37x - 3$.
8. Найдите все комплексные корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
9. Найдите все комплексные корни уравнения: $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.
10. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25 + 4\sqrt[3]{5} + 1}}$.
11. Выразите многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2$ через основные (элементарные) симметрические многочлены.
12. Найдите сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Примерные темы курсовых работ:

1. Корни из единицы. Круговые поля.
2. Теория Галуа
3. Алгебраические вычисления в системе GAP
4. Целочисленные групповые кольца.
5. Уравнения с двумя переменными над кольцом целых чисел. Уравнение Пелля.
6. Конечные поля
7. Число действительных корней многочлена с действительными коэффициентами
8. Задание группы образующими и определяющими соотношениями.
9. Структура р-групп малого порядка
10. Линейные группы
11. Группы подстановок
12. Силовские подгруппы
13. Теория представлений. Представление конечных групп малого порядка.

4.2 Описание уровней и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Код компетенции, код индикаторов компетенции УК-1.2. ПК-1.1. ПК-1.2.ПК-3.1.					
Уровни освоения компетенции	Содержательное описание уровня	Основные признаки выделения уровня (критерии оценки сформированности)		Пятибалльная шкала (академическая) оценка	% освоения (рейтинговая оценка)*
Высокий (продвину тый)	Творческая деятельность	Обучающийся готов самостоятельно решать стандартные и нестандартные профессиональные задачи в предметной области дисциплины	Отлично	зачтено	86-100
Средний (оптималь ный)	Применение знаний и умений в более широких контекстах учебной и профессиональной деятельности, нежели по образцу, с большей степенью самостоятельности и инициативы	Обучающийся готов самостоятельно решать различные стандартные профессиональные задачи в предметной области	Хорошо		61-85
Пороговы й	Репродуктивная деятельность	Обучающийся способен решать необходимый минимум стандартных профессиональных задач в предметной области дисциплины	Удовлетворит ельно		41-60
Недостато чный	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня		Неудовлетворитель но / не зачтено		40 и ниже

4.3 Примерные критерии оценивания ответа студентов на экзамене (зачете)

5 «отлично»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.
4 «хорошо»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -возможны единичные ошибки, исправляемые самим студентом после замечания преподавателя; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.
3 «удовлетворительно» (зачтено)	-затруднения с комплексной оценкой предложенной ситуации; -неполное теоретическое обоснование, требующее наводящих вопросов преподавателя; -выполнение заданий при подсказке преподавателя; - затруднения в формулировке выводов.
2 «неудовлетворительно»	- неправильная оценка предложенной ситуации; -отсутствие теоретического обоснования выполнения заданий.

5 ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ

1. учебная аудитория для лекционных занятий
2. учебная аудитория для семинарских, практических занятий
3. компьютерный класс – аудитория для самостоятельной работы
4. Лицензионное программное обеспечение:
 - Операционная система Windows 10
 - Microsoft Office Professional Plus
 - Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition
 - Справочная правовая система Консультант плюс
 - 7-zip
 - Adobe Acrobat Reader DC
5. Специализированное оборудование и технические средства обучения
 - Проектор
 - Компьютер/ноутбук